



Conference: Interdisciplinary Congress of Renewable Energies, Industrial Maintenance, Mechatronics  
and Information Technology  
**BOOKLET**



RENIECYT - LATINDEX - Research Gate - DULCINEA - CLASE - Sudoc - HISPANA - SHERPA UNIVERSIA - E-Revistas - Google Scholar  
DOI - REDIB - Mendeley - DIALNET - ROAD - ORCID

**Title: Simulation of chaotic oscillators of fractional order**

**Authors: SILVA-JUÁREZ, Alejandro, SALAZAR-PEDRAZA, Miguel De Jesús, PONCE-MELLADO, Juan Jorge y HERRERA-SÁNCHEZ, Gustavo.**

Editorial label ECORFAN: 607-8695

BCIERMMI Control Number: 2019-119

BCIERMMI Classification (2019): 241019-119

Pages: 21

RNA: 03-2010-032610115700-14

**ECORFAN-México, S.C.**

143 – 50 Itzopan Street  
La Florida, Ecatepec Municipality  
Mexico State, 55120 Zipcode  
Phone: +52 1 55 6159 2296  
Skype: ecorfan-mexico.s.c.  
E-mail: contacto@ecorfan.org  
Facebook: ECORFAN-México S. C.

Twitter: @EcorfanC

[www.ecorfan.org](http://www.ecorfan.org)

**Holdings**

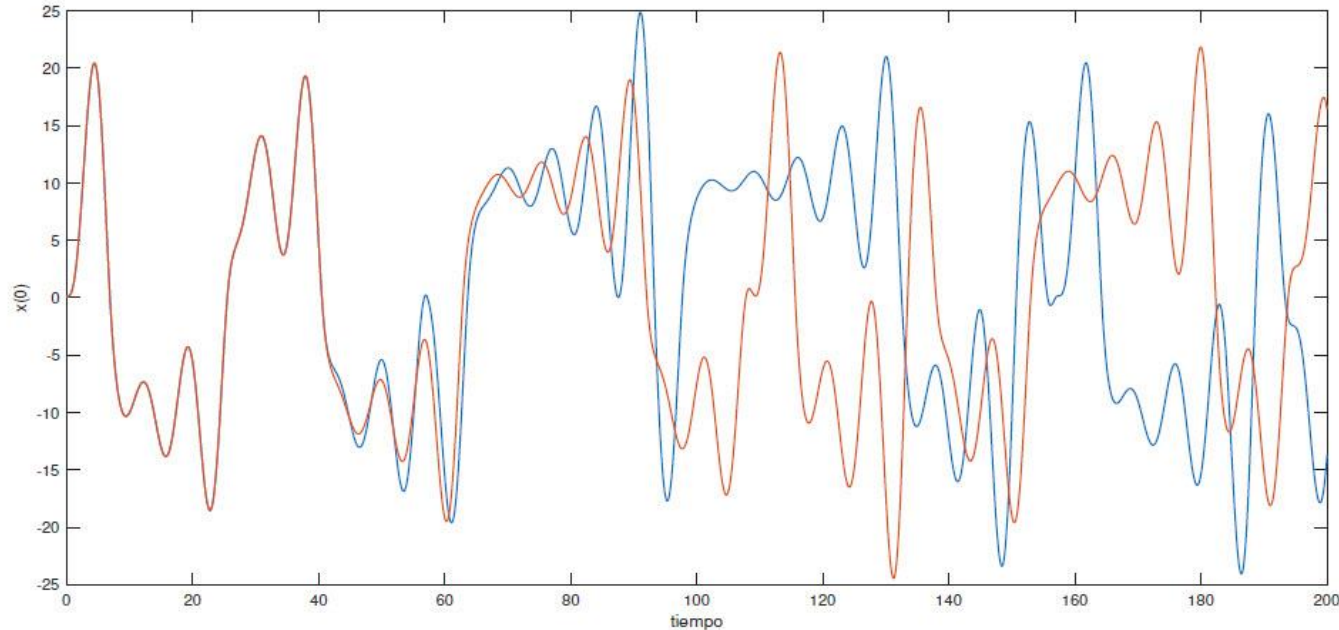
Mexico	Colombia	Guatemala
Bolivia	Cameroon	Democratic
Spain	El Salvador	Republic
Ecuador	Taiwan	of Congo
Peru	Paraguay	Nicaragua

- Antecedentes
- Métricas del Caos
- Sistemas caóticos de orden entero
- Sistemas caóticos de orden fraccional
- Metodología para la solución numérica
- Orden de la derivada fraccional
- Definiciones para la aproximación numérica
- Simulación de osciladores caóticos de orden fraccional

# Antecedentes

El término Caos se refiere a un tipo de comportamiento dinámico no lineal complejo que posee algunas características muy especiales:

- Es aperiódico, determinístico y extremadamente sensible a las condiciones iniciales.



Sistema de Lorenz: La diferencia en las condiciones iniciales es  $x(0)=0.1$  y  $x(0)=0.1000001$

# Modelos de sistemas caóticos de orden entero

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -ax - by - cz + d_1 f_0(x, k)\end{aligned}$$

donde  $f_0(x, k)$  es

$$f_0(x, k) = \begin{cases} k, & \text{si } x > 1, \\ kx, & \text{si } |x| \leq 1, \\ -k, & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Sistema SNLF

$$(1) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(x - y) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned} \quad (2)$$

Sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned} \quad (3)$$

Sistema de Rössler

# Modelos de sistemas hypercaóticos de orden entero

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - y) + \alpha z \\ \dot{y} &= \beta(x^2 - 1)y \\ \dot{z} &= \gamma(1 - y)v \\ \dot{v} &= \eta z\end{aligned}\quad (4)$$

Bouali, S. (2015)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_1(x_2 + 0.2(x_1 - 2x_1^3)) \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\beta_3 x_2 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\beta - 4x_1\end{aligned}\quad (5)$$

Liu, L., and Liu, C. (2014)

# Sistemas de Orden Fraccional

En 1695 se introdujo la teoría del cálculo fraccional, pero solo se desarrolló como una rama de la matemática pura.

En las últimas décadas se encontró que los modelos de sistemas de orden fraccional permiten describir y modelar un objeto real de manera más precisa que usando métodos clásicos *enteros*.

Junto con el desarrollo del cálculo fraccional, se demostró que muchos sistemas diferenciales no lineales de orden fraccionario se comportan de manera caótica.

# Metodología para la solución numérica de sistemas caóticos de orden fraccional

- Obtener los puntos de equilibrio del sistema orden fraccional
- Calcular los valores propios mediante la aplicación de la matriz jacobina y determinar la estabilidad del sistema
- Determinar el valor de la fracción ya sea conmensurado o inconmensurado para garantizar el caos
- Determinar el tamaño de paso de integración
- Aplicar el método ABM y la definición de G-L para aproximar las derivadas de orden fraccional
- Realizar las simulaciones numéricas
- Calcular las métricas: Exponente de Lyapunov, Entropía, Dimensión Kaplan-Yorke y Mapas de Poincaré

Se explora el sistema caótico de Lorenz de orden fraccional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(x - y) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}D^{q_1} x(t) &= \sigma(x(t) - y(t)), \\ D^{q_2} y(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ D^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t),\end{aligned}\tag{7}$$

con parámetros:  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  y  $\beta = 8/3$ , donde  $0 < q_n < 1$  y si  $q_1 = q_2 = q_3$  el sistema es **conmensurado** y si  $q_1 \neq q_2 \neq q_3$  el sistema es **inconmensurado**.



# Sistemas Caóticos de Orden Fraccional

De acuerdo a la metodología propuesta, el primer paso es **obtener los puntos de equilibrio** del sistema:

$$\sigma(y - x) = 0 \quad (8)$$

$$x(\rho - z) - y = 0 \quad (9)$$

$$xy - \beta z = 0 \quad (10)$$

Resolviendo (8) se obtiene el valor para  $x$ , sustituyendo en (9) para  $z$ , y finalmente sustituyendo en (10) se obtiene  $y$ :

$$\begin{array}{lll} \sigma y - \sigma x = 0 & x(\rho - z) - x = 0 & xy - \beta z = 0 \\ \sigma y = \sigma x & x\rho - xz - x = 0 & y^2 - \beta(\rho - 1) = 0 \\ x = y & -xz = -x(\rho - 1) & y^2 = \beta(\rho - 1) \\ & z = \rho - 1 & y = \sqrt{\beta(\rho - 1)} \end{array}$$

# Sistemas Caóticos de Orden Fraccional

El sistema de Lorenz tiene entonces tres puntos de equilibrio, el primero se encuentra en el origen  $E_1 = (0, 0, 0)$  y los otros dos se encuentran en  $E_2 = (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$  y  $E_3 = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ . La **matriz jacobiana**  $J_{(x^*, y^*, z^*)}$  en el punto de equilibrio  $E^* = (x^*, y^*, z^*)$  esta dada por:

$$J_{(x^*, y^*, z^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

# Sistemas Caóticos de Orden Fraccional

Encontrando la ecuación característica de la forma  $|\lambda I - J_{E_1}| = 0$ , se obtienen los **valores propios** del sistema (7) y resolviendo en los puntos de equilibrio se tiene:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho & \lambda + 1 & x \\ -y & -x & \lambda + \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda_{(1,2,3)} = (-22.8277, 11.8277, -2.6677) \\ E_2 &= \lambda_{(1,2,3)} = (-13.8546, 0.0940, \pm 10.1945i) \\ E_3 &= \lambda_{(1,2,3)} = (-13.8546, 0.0940, \pm 10.1945i) \end{aligned} \quad (11)$$

# Sistemas Caóticos de Orden Fraccional

Para determinar el **orden fraccional mínimo** con el cual el sistema de Lorenz es caótico usando los parámetros  $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ , se usa la relación:

$$q \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arg} \frac{|Im(\lambda)|}{|Re(\lambda)|} \quad (12)$$

$$q \geq 0.9940$$

En este caso, si se considera el orden de la derivada  $q_1 = q_2 = q_3$ , se tiene que el orden mínimo conmensurado es  $q \geq 0.9940$

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* (Vol. 198). Elsevier.

# Sistemas Caóticos de Orden Fraccional

## Definiciones aceptadas para la aproximación numérica de sistemas de orden fraccional

- Definición de Grünwald-Letnikov
- Definición de Riemann-Liouville
- Definición de Caputo

# Aproximaciones numéricas para resolver sistemas caóticos de orden fraccional

Definición de Grünwald-Letnikov

$$y(t_k) = f(y(t_{k-1}), t_{k-1})h^q - \sum_{j=v}^k c_j^q y(t_{k-j}) \quad (13)$$

Método Adams-Bashforth-Moulton esquema predictor-corrector

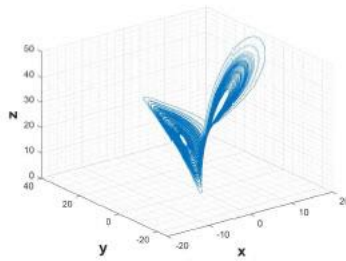
$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_n(t_j)) \quad (14)$$

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^q}{\Gamma(\alpha + 2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) +$$

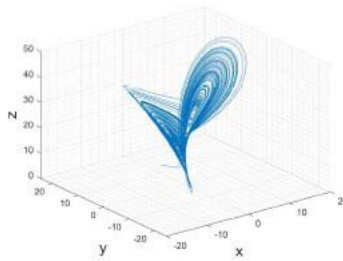
$$\frac{h^q}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_n(t_j))$$

# Simulaciones del Sistema de Lorenz con GL y ABM

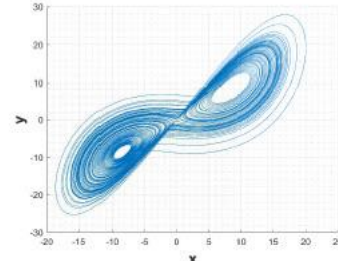
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t). \end{aligned} \quad (16)$$



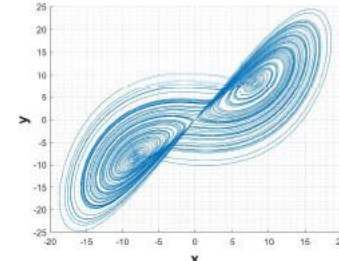
(a) GL



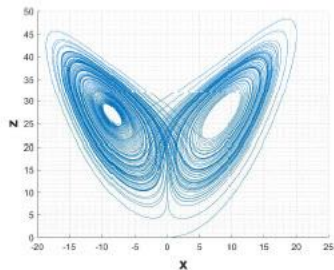
(b) ABM



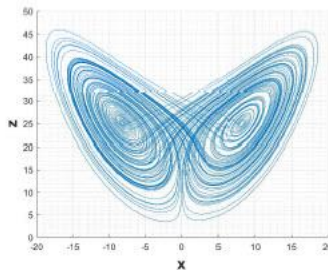
(c) GL



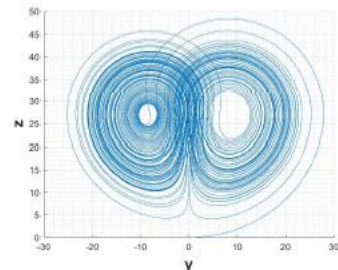
(d) ABM



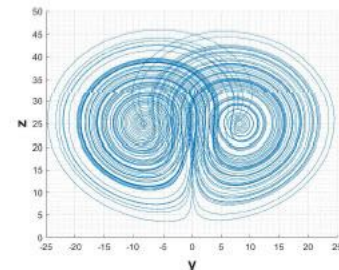
(e) GL



(f) ABM



(g) GL

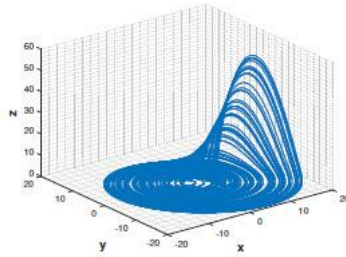


(h) ABM

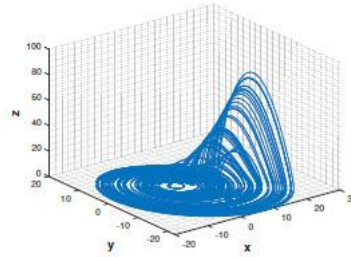
Sistema caótico de Lorenz con los métodos GL y ABM respectivamente; con parámetros  $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ ,  $T_{sim} = 100s$ ,  $h = 5 \times 10^{-3}$ , condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$ , y orden fraccional  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$

# Simulaciones del Sistema de Rössler con GL y ABM

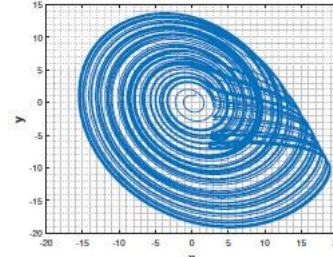
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -y(t) - z(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) + ay(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= b + z(t)(x(t) - c). \end{aligned} \quad (17)$$



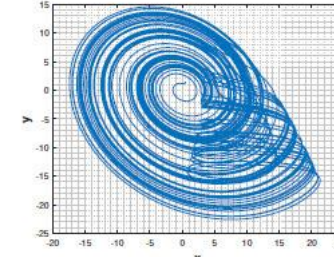
(a) GL



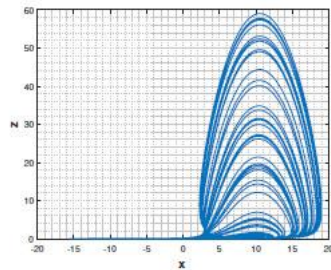
(b) ABM



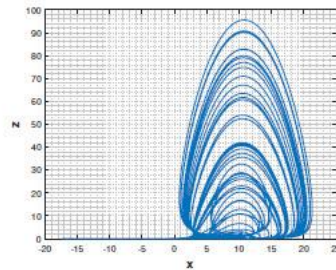
(c) GL



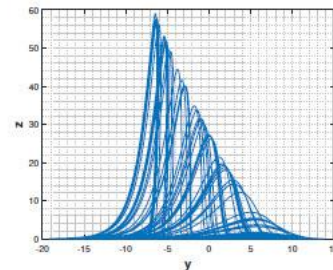
(d) ABM



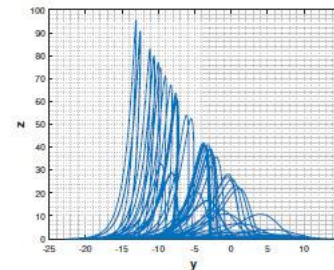
(e) GL



(f) ABM



(g) GL



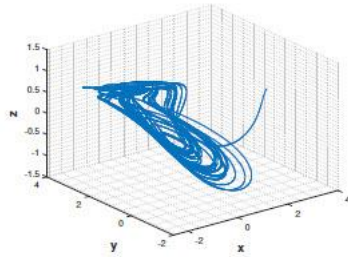
(h) ABM

Sistema caótico de Rössler con los métodos GL y ABM respectivamente; con parámetros  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $T_{sim} = 100s$ ,  $h = 5 \times 10^{-3}$ , condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 1.5, 0.1)$ , y orden fraccional  $q_1 = 0.9$ ,  $q_2 = 0.85$ ,  $q_3 = 0.95$

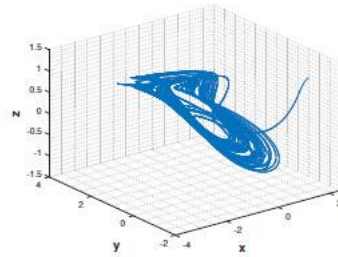


# Simulaciones del Sistema Finance con GL y ABM

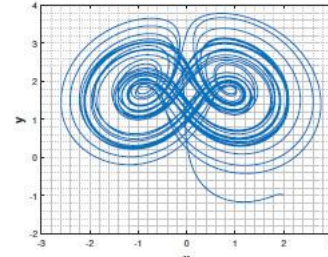
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= z(t) + x(t)(y(t) - a), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= 1 - by(t) - |x(t)|, \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -x(t) - cz(t). \end{aligned} \quad (18)$$



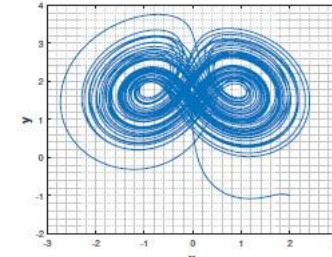
(a) GL



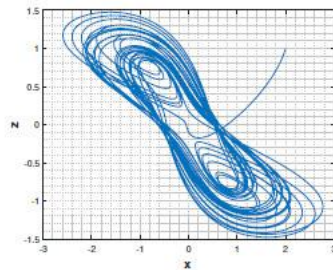
(b) ABM



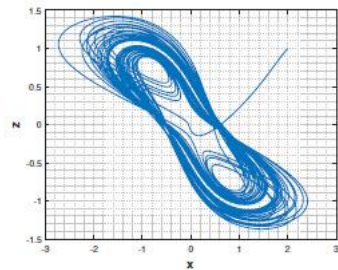
(c) GL



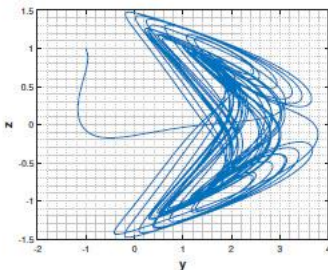
(d) ABM



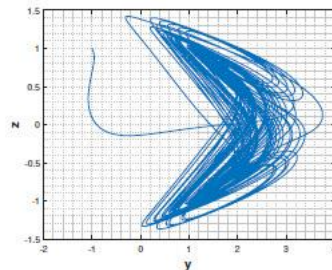
(e) GL



(f) ABM



(g) GL

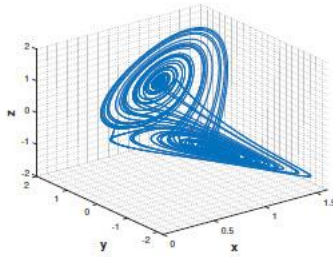


(h) ABM

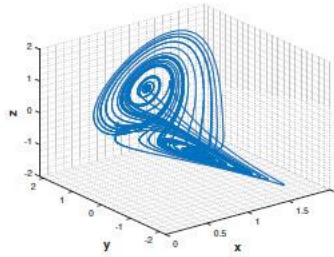
Sistema caótico Finance con los métodos GL y ABM respectivamente; con parámetros  $a = 1, b = 0.1, c = 1$ ,  $T_{sim} = 100s, h = 5 \times 10^{-3}$ , condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0)) = (2, -1, 1)$ , y orden fraccional  $q_1 = 0.99, q_2 = 0.95, q_3 = 0.99$

# Simulaciones del Sistema de Liu con GL y ABM

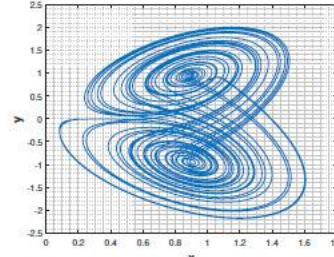
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -ax(t) - ey^2(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= by(t) - kx(t)z(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -cz(t) + mx(t)y(t). \end{aligned} \quad (19)$$



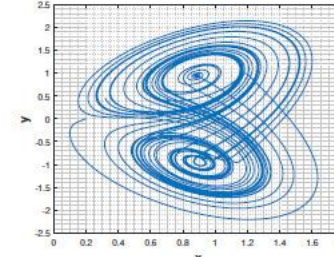
(a) GL



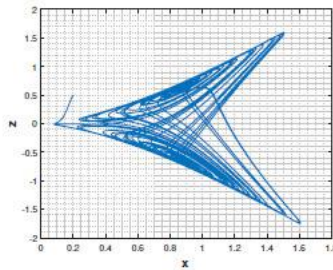
(b) ABM



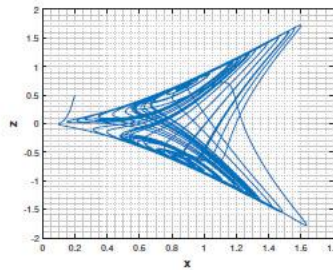
(c) GL



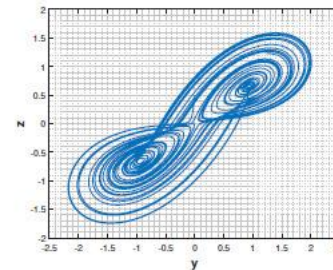
(d) ABM



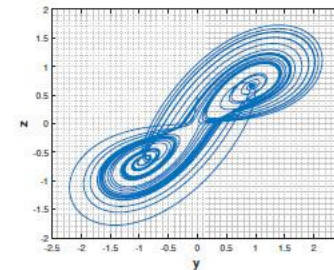
(e) GL



(f) ABM



(g) GL

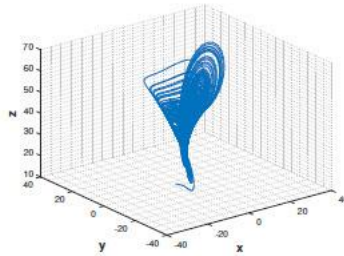


(h) ABM

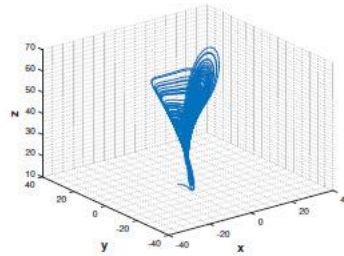
Sistema caótico de Liu con los métodos GL y ABM respectivamente; con parámetros  $a = 1$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 5$ ,  $e = 1$ ,  $k =$ ,  $m = 4$ ,  $T_{sim} = 100s$ ,  $h = 5 \times 10^{-3}$ , condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.2, 0, 0.5)$ , y orden fraccional  $q_1 = 0.95$ ,  $q_2 = 0.95$ ,  $q_3 = 0.95$

# Simulaciones del Sistema de Chen con GL y ABM

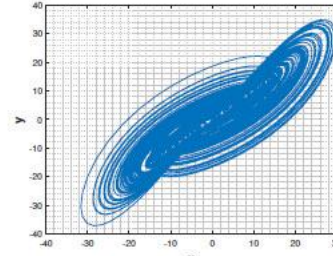
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= dx(t) - x(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \quad (20)$$



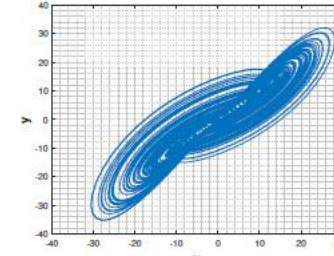
(a) GL



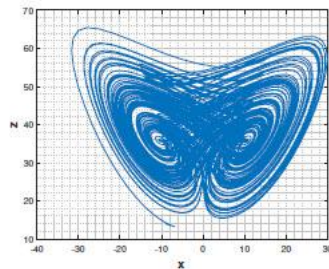
(b) ABM



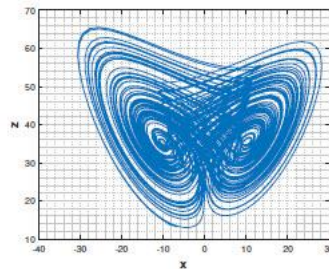
(c) GL



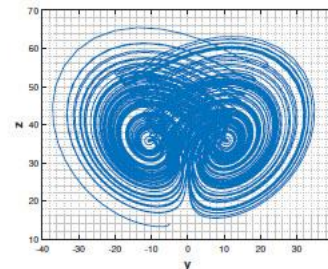
(d) ABM



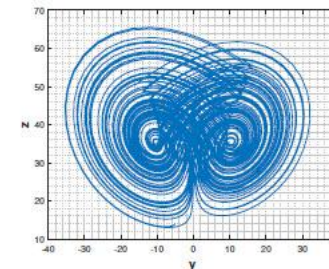
(e) GL



(f) ABM



(g) GL

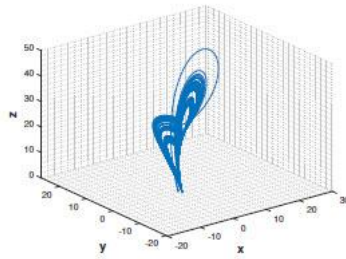


(h) ABM

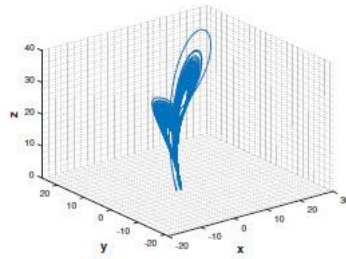
Sistema caótico de Chen con los métodos GL y ABM respectivamente; con parámetros  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$ ,  $d = -7$ ,  $T_{sim} = 100s$ ,  $h = 5 \times 10^{-3}$ , condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$ , y orden fraccional  $q_1 = 0.9$ ,  $q_2 = 0.9$ ,  $q_3 = 0.9$

# Simulaciones del Sistema de Lü con GL y ABM

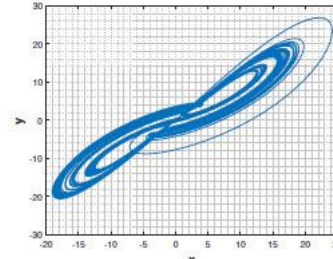
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \quad (21)$$



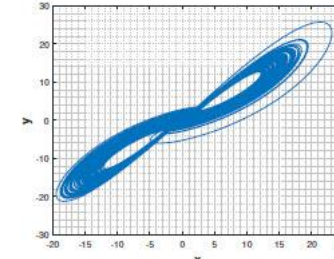
(a) GL



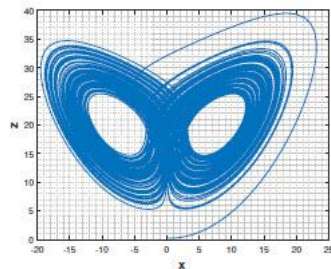
(b) ABM



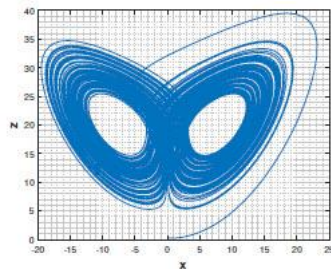
(c) GL



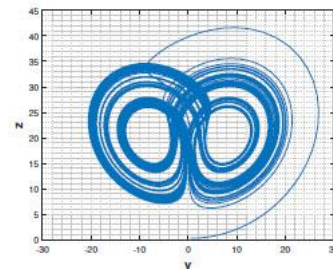
(d) ABM



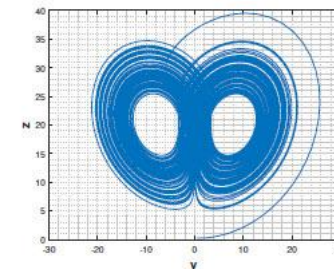
(e) GL



(f) ABM

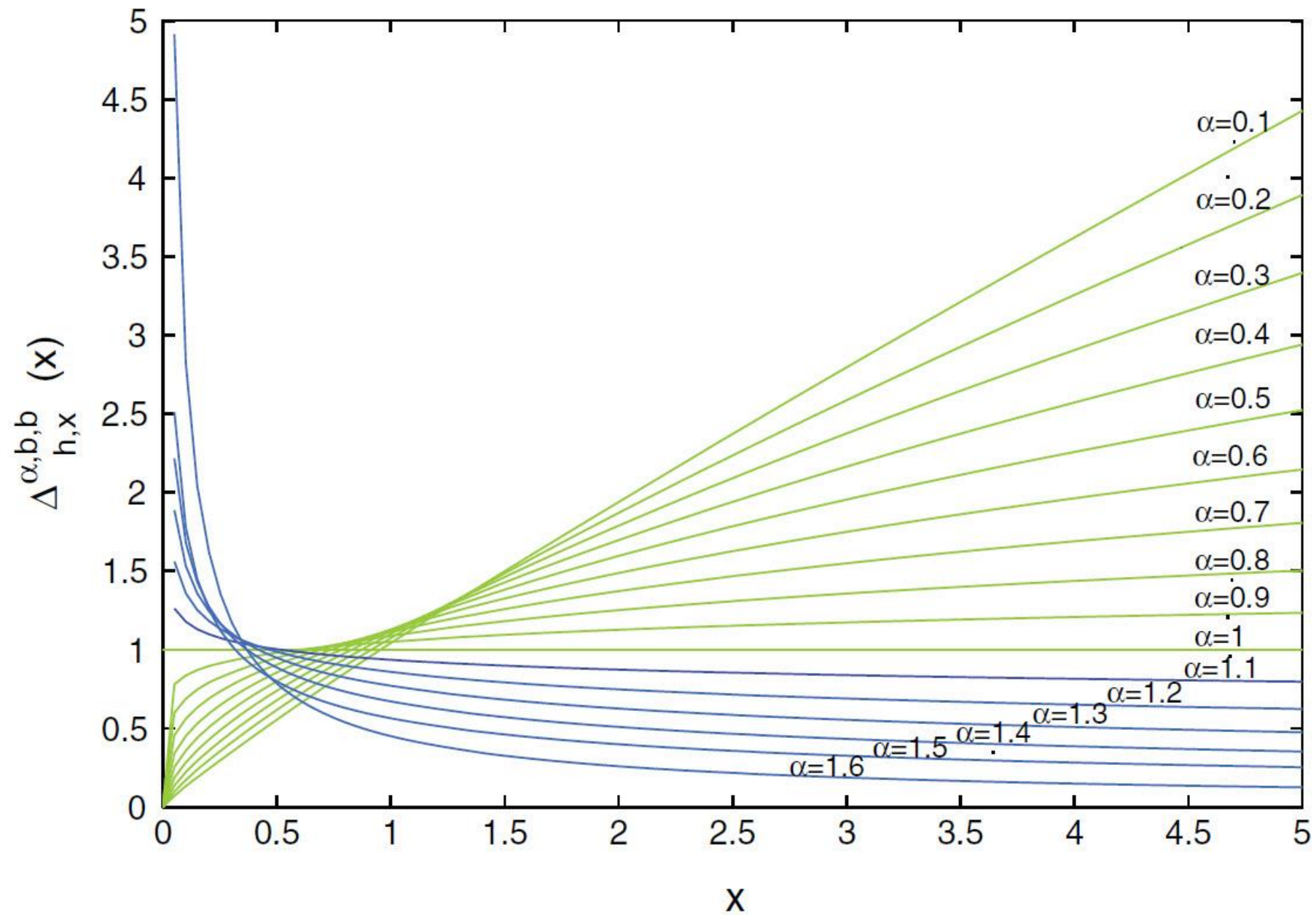


(g) GL

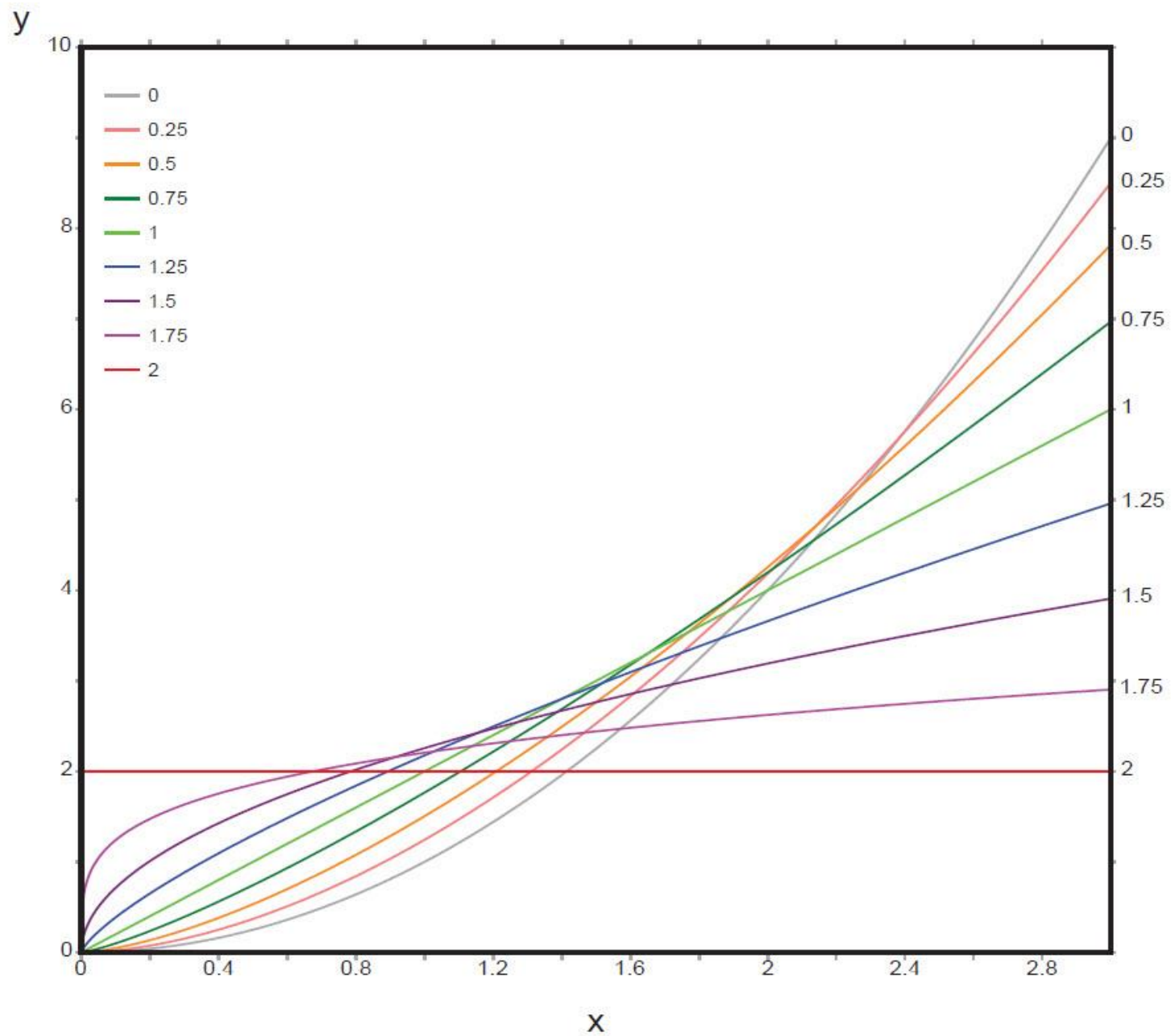


(h) ABM

Sistema caótico de Lü con los métodos GL y ABM respectivamente; con parámetros  $a = 36$ ,  $b = 3$ ,  $c = 20$ ,  $T_{sim} = 100s$ ,  $h = 5 \times 10^{-3}$ , condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.2, 0.5, 0.3)$ , y orden fraccional  $q_1 = 0.985$ ,  $q_2 = 0.99$ ,  $q_3 = 0.98$



Derivada fraccional de la función  $D^\alpha(x)$  con orden  $0 < \alpha \leq 1.6$  aplicando la definición de Grünwald-Letnikov.



Derivada fraccional de la función  $D^\alpha(x^2)$  con orden  $0 < \alpha \leq 2$  aplicando la definición de Grünwald-Letnikov.



**ECORFAN®**

© ECORFAN-Mexico, S.C.

No part of this document covered by the Federal Copyright Law may be reproduced, transmitted or used in any form or medium, whether graphic, electronic or mechanical, including but not limited to the following: Citations in articles and comments Bibliographical, compilation of radio or electronic journalistic data. For the effects of articles 13, 162,163 fraction I, 164 fraction I, 168, 169,209 fraction III and other relative of the Federal Law of Copyright. Violations: Be forced to prosecute under Mexican copyright law. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, in this publication do not imply, uniformly in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protector in laws and regulations of Mexico and therefore free for General use of the international scientific community. BCIERMMI is part of the media of ECORFAN-Mexico, S.C., E: 94-443.F: 008- ([www.ecorfan.org/](http://www.ecorfan.org/) booklets)